



*** RECURSO PEDAGÓGICO DE DISTRIBUIÇÃO GRATUITA ***

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – ESTUDOS DO PRISMAS	1
1. DEFINIÇÃO	1
2. ELEMENTOS DO PRISMA	1
3. PRISMA RETO E PRISMA OBLÍQUO	1
4. PRISMA REGULAR	1
5. CÁLCULO DAS CARACTERÍSTICAS	2
5.1 Área lateral (A_l)	2
5.2 Área da base (A_b)	2
5.3 Área total (A_t)	2
5.4 Volume (V)	3
6. PARALELEPÍPEDO	6
6.1 Área	6
6.2 Volume	6
7. CUBO	7
7.1 Área	7
7.2 Volume	7
CAPÍTULO II - CILINDRO CIRCULAR	11
1. DEFINIÇÃO	11
2. ELEMENTOS DO CILINDRO CIRCULAR	11
3. CILINDRO CIRCULAR RETO	12
4. CÁLCULO DAS CARACTERÍSTICAS	12
4.1 Área da base (A_b)	12
4.2 Área lateral (A_l)	12
4.3 Área total (A_t)	12
4.4 Volume (V)	12
5. OBJETOS DIGITAIS DE APRENDIZAGEM	14
6. REFERÊNCIAS	14

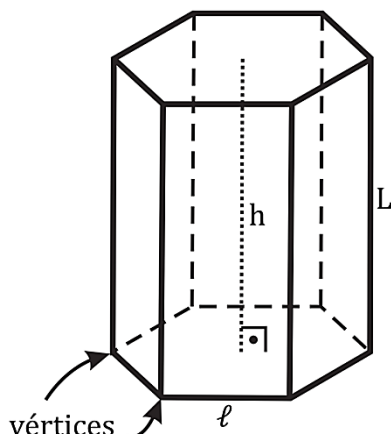
CAPÍTULO I – ESTUDOS DO PRISMAS

1. DEFINIÇÃO

Denomina-se prisma a todo sólido geométrico limitado por dois polígonos congruentes e paralelos denominados **bases do prisma** e faces. O prisma contém **faces laterais** com o formato de paralelogramos.

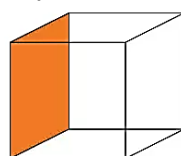
A denominação de um prisma é feita de acordo com o tipo de sua base. Prisma triangular é o prisma cuja base é um triângulo; prisma quadrangular é o prisma cuja base é um quadrilátero; prisma pentagonal é o prisma em que a base é um pentágono; e assim por diante.

2. ELEMENTOS DO PRISMA

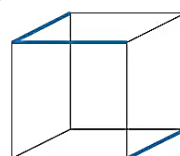


- **Aresta da base (ℓ):** é o lado do polígono da base.
- **Aresta lateral (L):** é o lado de uma face lateral.
- **Altura (h):** é a distância entre os planos das bases.
- **Vértices:** são as “quinas” (interseção entre duas arestas da base).

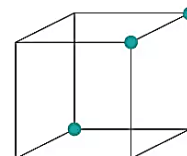
Exemplo: Face, arestas e vértices em destaques em prismas, nas figuras abaixo:



FACE



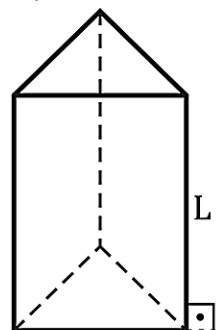
ARESTA



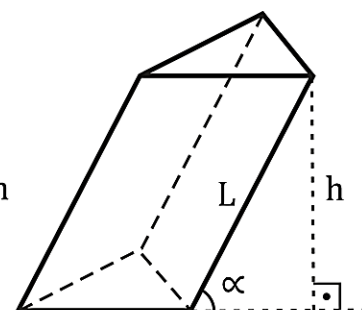
VÉRTICE

3. PRISMA RETO E PRISMA OBLÍQUO

Prisma reto é todo prisma em que as arestas laterais são perpendiculares a cada base. Caso o prisma não seja reto ele é chamado oblíquo. O prisma oblíquo as arestas laterais formam um ângulo α com as bases, sendo $\alpha \neq 90^\circ$. No prisma reto as faces laterais são retângulos e no prisma oblíquo as faces laterais são paralelogramos.



prisma reto



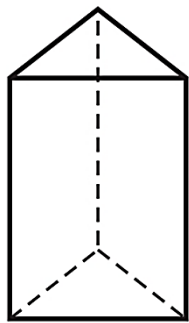
prisma oblíquo

4. PRISMA REGULAR

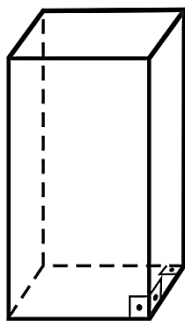
É todo prisma reto cuja base é um polígono regular.

Vale lembrar que polígono regular é aquele que tem todos os lados e ângulos internos de mesma medida.

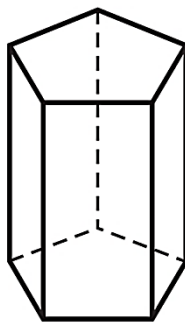
Exemplos:



prisma triangular regular



prisma quadrangular regular



prisma pentagonal regular

Observação: O **prisma triangular regular** tem nas bases triângulos equiláteros; o **prisma quadrangular regular** tem nas bases quadrados; o **prisma pentagonal regular**, um pentágono regular; e assim por diante.

5. CÁLCULO DAS CARACTERÍSTICAS

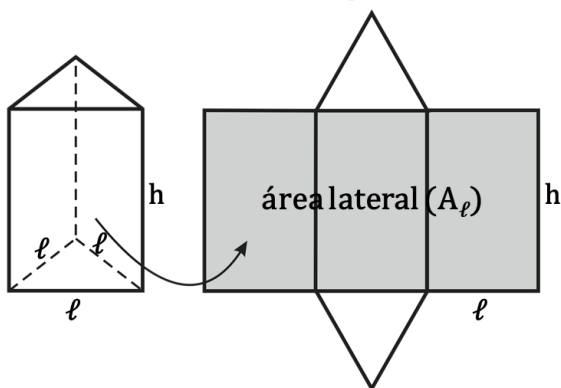
5.1 Área lateral (A_ℓ)

Descritor SAEB: D3 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

É a soma das áreas de todas as faces laterais do prisma.

O exemplo abaixo é de um prisma triangular regular, portanto, a sua área lateral é constituída de três faces retangulares, logo,

forma planificada



$$A_\ell = 3 \cdot A_{\text{retângulo}} = 3 \cdot \ell h$$

; sendo

ℓ – aresta da base (ou base do retângulo da face);

h – aresta lateral (ou altura do retângulo da face).

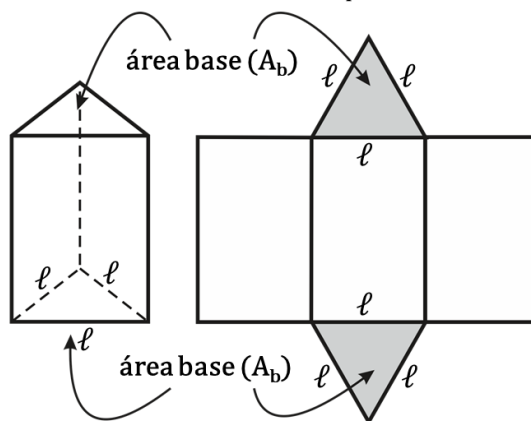
A_ℓ – área lateral do prisma.

Observação: Nem sempre o prisma terá três faces, então a expressão para calcular a área lateral do prisma não é fixa, um prisma pode ter 4 faces, 5 faces, etc. A expressão varia conforme o número de faces do prisma.

5.2 Área da base (A_b)

É a área do polígono que constitui a base.

forma planificada



Como no exemplo acima o polígono da base é um triângulo equilátero, logo,

$$A_b = A_{\text{Triângulo Equilátero}} = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$$

; sendo

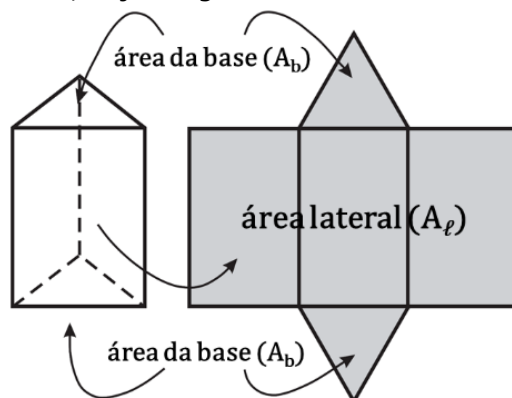
ℓ – aresta da base do prisma (ou lado do triângulo equilátero da base);

A_b – área da base do prisma.

Observação: A expressão da área da base de um prisma não é fixa, varia conforme o polígono da base. O exemplo acima foi de um prisma triangular regular daí a fórmula utilizada foi da área do triângulo equilátero, $\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$, mas, por exemplo se fosse um prisma quadrangular regular a fórmula para calcular a área da sua base seria da área do quadrado, ℓ^2 , e assim por diante. Sempre tem que ser observada qual é a figura da base do prisma.

5.3 Área total (A_t)

É a soma das áreas de todas as faces do prisma. Em um prisma pode-se calcular a área total pela soma entre a área lateral e as áreas das duas bases, veja a figura abaixo:



Portanto a expressão para calcular a área total do prisma é

$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$$

; sendo

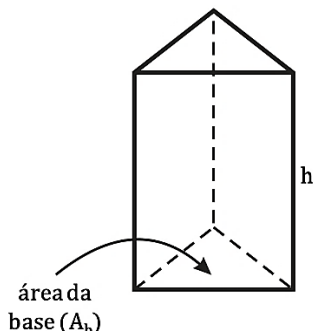
A_ℓ – área lateral do prisma;

A_b – área da base do prisma;

A_t – área total do prisma.

5.4 Volume (V)

É um número que associado a uma unidade conveniente fornece a **quantidade de espaço ocupado pelo sólido**. A unidade geralmente utilizada como padrão de medida é a cubagem (m^3 , cm^3 , mm^3 , ...). O volume é o produto da área da base A_b pela altura h , figura abaixo:



A expressão para calcular a área total do prisma é

$$V = A_b \cdot h$$

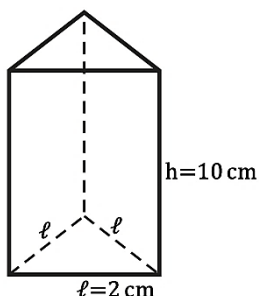
; sendo

A_b – área da base do prisma;

h – altura do prisma;

V – volume do prisma.

Exemplo 1: Observe o prisma triangular regular abaixo:



Calcular:

a) a sua área lateral.

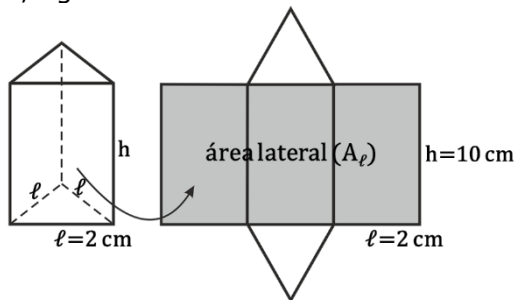
b) a sua área da base, use $\sqrt{3} = 1,7$.

c) a sua área total.

d) o seu volume.

Resoluções:

a) Observe a área lateral do prisma na forma planificada, figura abaixo:

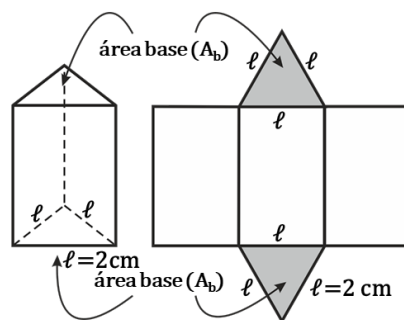


A área lateral desse prisma é constituída de três faces retangulares, portanto

$$A_l = 3 \cdot A_{\text{retângulo}} = 3 \cdot \ell h = 3 \cdot 2 \cdot 10 = 60 \text{ cm}^2$$

Resposta: A área lateral do prisma é 60 cm^2 .

b) Observe a área da base do prisma na planificação, figura abaixo:

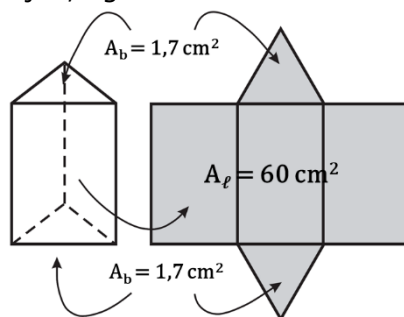


A área da base desse prisma é um triângulo equilátero, portanto

$$A_b = A_{\text{Triângulo Equilátero}} = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} = 1,7 \text{ cm}^2$$

Resposta: A área da base do prisma é $1,7 \text{ cm}^2$.

c) A área lateral e área da base já foram calculados nos itens anteriores, observe os seus valores na planificação, figura abaixo:



A expressão da área total do prisma é

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b$$

, logo

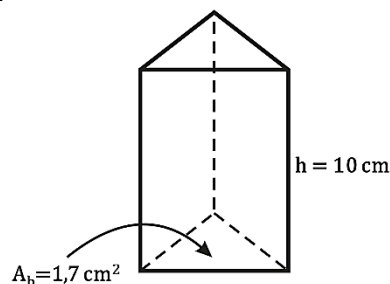
$$A_t = 60 + 2 \cdot 1,7$$

$$A_t = 60 + 3,4$$

$$A_t = 63,4 \text{ cm}^2$$

Resposta: A área total do prisma é $63,4 \text{ cm}^2$.

d) Volume:



A expressão do volume do prisma é

$$V = A_b \cdot h$$

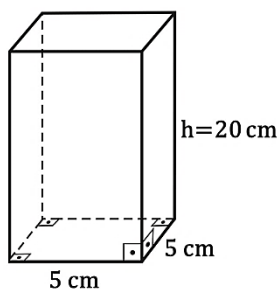
, logo

$$V = 1,7 \cdot 10$$

$$V = 17 \text{ cm}^3$$

Resposta: O volume do prisma é 17 cm^3 .

Exemplo 2: Um tijolo tem a forma de **prisma quadrangular regular** em que a aresta da base mede **5 cm** e a altura **20 cm**. Observe a figura abaixo:

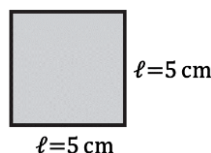


Calcular:

- a sua área da base do tijolo.
- a sua área lateral.
- a sua área total.
- o seu volume.

Resoluções:

- a) A área da base do tijolo na figura abaixo:



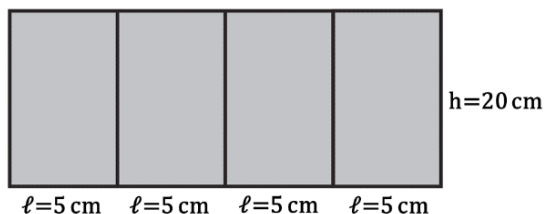
A área da base do tijolo é no formato de quadrado, logo

$$A_b = A_{\text{quadrado}}$$

$$A_b = \ell^2 = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$$

Resposta: A área da base do tijolo é 25 cm^2 .

- b) A área lateral desse prisma na figura abaixo:



A área lateral desse prisma é constituída de quatro faces retangulares, portanto

$$A_\ell = 4 \cdot A_{\text{retângulo}} = 4 \cdot \ell h = 4 \cdot 5 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$$

Resposta: A área lateral do tijolo é 400 cm^2 .

- c) A expressão da área total do prisma é

$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$$

, logo

$$A_t = 400 + 2 \cdot 25$$

$$A_t = 400 + 50$$

$$A_t = 450 \text{ cm}^2$$

Resposta: A área total do tijolo é 450 cm^2 .

- d) A expressão do volume do prisma é

$$V = A_b \cdot h$$

, logo

$$V = 25 \cdot 20$$

$$V = 500 \text{ cm}^3$$

Resposta: O volume do tijolo é 500 cm^3 .

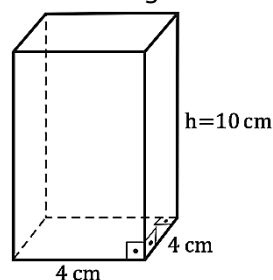
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Os exercícios **1)**, **2)**, **3)**, **4)** e **5)** contemplam o seguinte descritor e habilidade:

Descritor SAEB: D13 - Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Habilidade BNCC: EM13MAT309 - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.

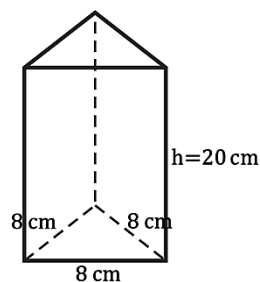
- 1)** Um tijolo tem a forma de prisma quadrangular regular em que a aresta da base mede **4 cm** e a altura **10 cm**. Observe a figura abaixo:



Calcule:

- a área da base do tijolo; $A_b = 16 \text{ cm}^2$
- a sua área lateral; $A_\ell = 160 \text{ cm}^2$
- a sua área total; $A_t = 192 \text{ cm}^2$
- o seu volume. $V = 160 \text{ cm}^3$

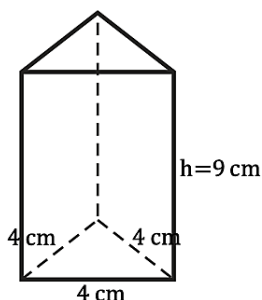
- 2)** Um objeto de decoração tem o formato de **prisma triangular regular**. As arestas da base medem **8 cm** cada e a altura do objeto é de **20 cm**, conforme a figura abaixo:



Considerando $\sqrt{3} = 1,7$, calcule:

- a área da base desse objeto; $A_b = 27,2 \text{ cm}^2$
- a sua área lateral; $A_\ell = 480 \text{ cm}^2$
- a sua área total; $A_t = 534,4 \text{ cm}^2$
- o seu volume. $V = 544 \text{ cm}^3$

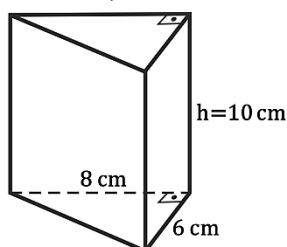
3) Num prisma triangular regular, a aresta da base mede **4 cm** e aresta lateral mede **9 cm**, conforme a figura abaixo:



Considerando $\sqrt{3} = 1,7$, determine:

- a)** a área da base; $A_b = 6,8 \text{ cm}^2$ **c)** a área total; $A_t = 121,6 \text{ cm}^2$
b) a área lateral; $A_l = 108 \text{ cm}^2$ **d)** o volume. $V = 61,2 \text{ cm}^3$

4) Um sólido possui bases congruentes e paralelas no formato de triângulo retângulo. Sabendo que os catetos dos triângulos medem **6 m** e **8 m**, a altura do sólido é **10 m**, conforme a figura abaixo:



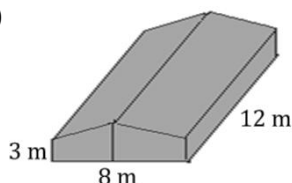
Calcule:

- a)** a área da base do sólido; $A_b = 24 \text{ m}^2$
b) a área lateral; $A_l = 240 \text{ m}^2$
c) a área total; $A_t = 288 \text{ m}^2$
d) o volume. $V = 240 \text{ m}^3$

EXERCÍCIOS CONTEXTUALIZADOS

5) O volume de ar contido em um galpão com a forma e dimensões dadas pela figura abaixo é: (a altura do galpão é igual 5 m)

- (a)** 192 m^3 **(d)** 360 m^3
(b) 384 m^3 **(e)** 768 m^3
(c) 480 m^3



O exercício **6)** contempla o seguinte descritor e habilidades:

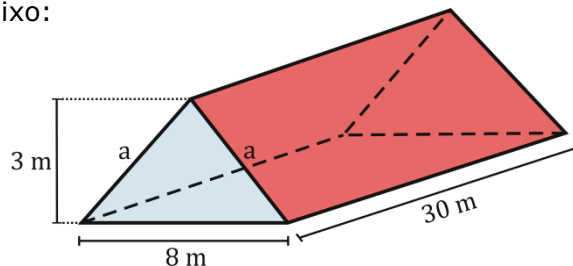
Descritor SAEB: D12 - Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figura plana.

Habilidade Enem: H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

Habilidade Enem: H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

Habilidade Enem: H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

6)(Gilberto-2018) A quantidade de materiais para executar uma obra é essencial para prever o custo da construção. Quer se construir um telhado cujas dimensões e formato são indicados na figura abaixo:



Sabendo que o telhado constitui a parte vermelha da figura acima e é composto de duas abas. A quantidade de telhas retangulares de 20 cm por 30 cm necessárias para fazer esse telhado é:

- (a)** 150 **(b)** 10^5 **(c)** $3 \cdot 10^2$ **(d)** $5 \cdot 10^3$ **(e)** $25 \cdot 10^4$

EXERCÍCIOS DE VESTIBULARES

O exercício **7)** contempla as seguintes habilidades:

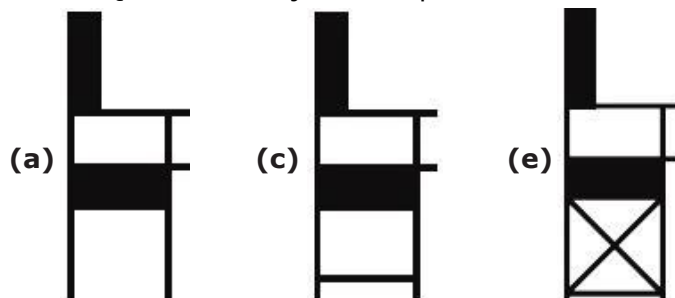
Habilidade Enem: H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

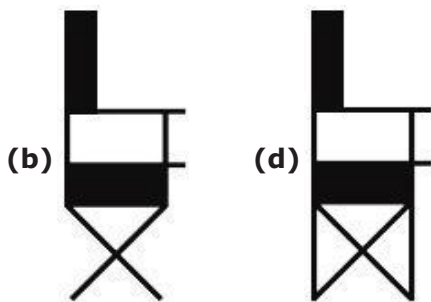
Habilidade BNCC: EM13MAT105 - Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.

7)(Enem-2016) Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da figura para uma aula ao ar livre. A professora, ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guardadas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.



Qual é o esboço obtido pelos alunos?





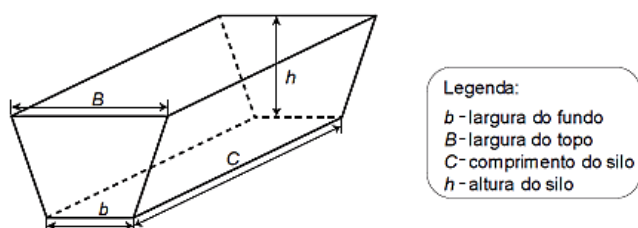
O exercício **8)** contempla o seguinte descritor e habilidades:

Descritor SAEB: D13 - Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Habilidade Enem: H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

Habilidade BNCC: EM13MAT309 - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.

8)(Enem-2014) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m³ desse tipo de silo.

EMBRAPA. Gado de corte. Disponível em: www.cnpqc.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

- (a) 110. (b) 125. (c) 130. (e) 260.

O exercício **9)** contempla o seguinte descritor e habilidade:

Descritor SAEB: D5 - Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

Habilidade Enem: H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

9)(Enem-2013) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.



Disponível em: www.flickr.com. Acesso em: 27 mar. 2012

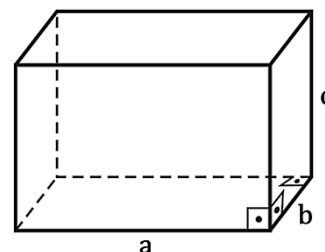
Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casa decimais nas operações, descobre-se que a área das bases desse prédio ocupa na avenida um espaço

- (a) menor que 100 m²
(b) entre 100 m² e 300 m²
(c) entre 300 m² e 500 m²
(d) entre 500 m² e 700 m²
(e) maior que 700 m²

6. PARALELEPÍPEDO

É todo prisma em que as bases são paralelogramos. No caso do **paralelepípedo reto retângulo** todas as faces são retangulares.

O paralelepípedo apresenta a forma que costumamos em nosso cotidiano chamar de caixa. É, portanto, um exemplo de sólido bastante frequente em nossa vida.



6.1 Área

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = ac + ac + bc + bc + 2 \cdot ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = 2ab + 2ac + 2bc$$

; sendo

a – aresta da base do paralelepípedo;
b – aresta da base do paralelepípedo;
c – aresta lateral do paralelepípedo;
A_t – área total do paralelepípedo.

6.2 Volume

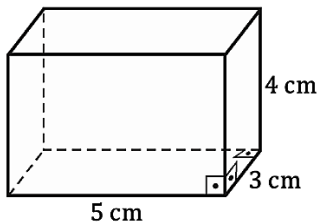
$$V = A_b \cdot h \Rightarrow$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

; sendo

a – aresta da base do paralelepípedo;
b – aresta da base do paralelepípedo;
c – aresta lateral do paralelepípedo;
V – volume do paralelepípedo.

Exemplo: Dado o paralelepípedo, figura abaixo.



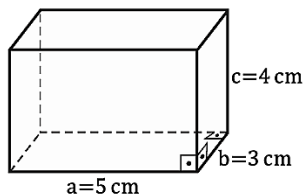
Calcular:

a) A sua área total.

b) O seu volume.

Resoluções:

a) Sendo



A expressão da área total do paralelepípedo

é

$$A_t = 2ab + 2ac + 2bc$$

, logo

$$A_t = 2 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$A_t = 30 + 40 + 24$$

$$A_t = 94 \text{ cm}^2$$

Resposta: a área total do paralelepípedo é 94 cm².

b) A expressão do volume do paralelepípedo é

$$V = a \cdot b \cdot c$$

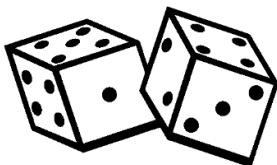
, logo

$$V = 5 \cdot 3 \cdot 4$$

$$V = 60 \text{ cm}^3$$

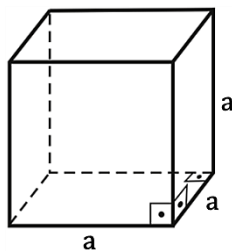
Resposta: o volume do paralelepípedo é 60 cm³.

7. CUBO



É todo paralelepípedo que apresenta arestas iguais.

No cubo todas as seis faces apresentam o formato quadrado.



7.1 Área

$$A_t = 6 \cdot A_{\text{quadrado}} \Rightarrow$$

$$A_t = 6a^2$$

; sendo

a – arestas do cubo;

A_t – área total do cubo.

7.2 Volume

$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow$$

$$V = a^3$$

; sendo

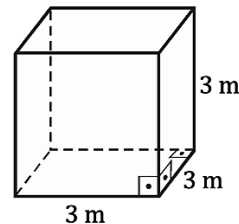
a – arestas do cubo;

V – volume do cubo.

Observação: O cubo também é chamado de **hexaedro regular** (hexa = seis e edro = face).

[Assista ao vídeo Planificação do Cubo →](#)

Exemplo: Dado o cubo, figura abaixo.



Calcular:

a) A sua área total.

b) O seu volume.

Resoluções:

a) A expressão da área total do cubo é

$$A_t = 6a^2$$

, logo

$$A_t = 6 \cdot 3^2$$

$$A_t = 6 \cdot 9$$

$$A_t = 54 \text{ m}^2$$

Resposta: a área total do cubo é 54 m².

b) A expressão do volume do cubo é

$$V = a^3$$

, logo

$$V = 3^3$$

$$V = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$V = 27 \text{ m}^3$$

Resposta: o volume do cubo é 27 m³.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Os exercícios **10), 11), 12), 13), 14)** e **15)** contemplam o seguinte descritor e habilidade:

Descritor SAEB: D13 - Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Habilidade BNCC: EM13MAT309 - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.

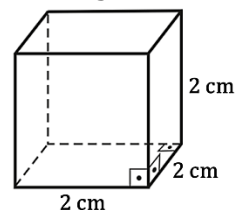
10) Um cubo possui 2 cm de aresta, figura abaixo. Calcule:

a) a área de uma de suas faces;

b) a sua área total;

c) o seu volume.

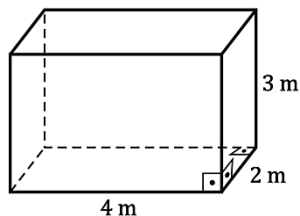
R: a) A_{face} = 4 cm²; b) A_t = 24 cm²; c) V = 8 cm³



11) Dado o paralelepípedo da figura ao lado. Calcule:

a) a sua área total; $A_t = 52 \text{ m}^2$

b) o seu volume. $V = 24 \text{ m}^3$



Os exercícios **12)** e **15)** contemplam a seguinte habilidade:

Habilidade Enem: H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

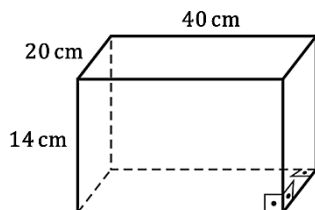
12) Uma indústria precisa fabricar 10 000 caixas de sabão com as medidas da figura ao lado. Desprezando as abas calcule:

a) a área total de uma caixa.

b) Quantos m^2 de papelão serão necessários para confeccionar uma caixa?

c) Quantos m^2 de papelão serão necessários para confeccionar as 10 000 caixas de sabão.

R: a) $A_t = 3 280 \text{ cm}^2$; b) $A_t = 0,328 \text{ m}^2$; c) $A_{\text{todas as caixas}} = 3 280 \text{ m}^2$



13) Quantos cm^2 de cartolina, aproximadamente, foram usados para montar um cubo de 10 cm de aresta? $A_t = 600 \text{ cm}^2$

14) Um cubo tem área total de 96 m^2 . Qual é a medida da aresta do cubo? $a = 4 \text{ m}$

15) Qual é o volume de concreto necessário para fazer uma laje de 20 cm de espessura em uma sala de 4 m por 3 m? $V = 2,4 \text{ m}^3$

O exercício **16)** contempla a seguinte habilidade:

Habilidade Enem: H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

16) Quanto mede a diagonal de um paralelepípedo reto retangular no qual as dimensões são 10 cm, 6 cm e 8 cm (considere $\sqrt{2} = 1,4$)? $D = 14 \text{ cm}$

EXERCÍCIOS DE VESTIBULARES

Os exercícios **17)** e **18)** contemplam o seguinte descritor e habilidade:

Descritor SAEB: D13 - Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Habilidade BNCC: EM13MAT309 - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.

17)(Enem-2017) Um casal realiza uma mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

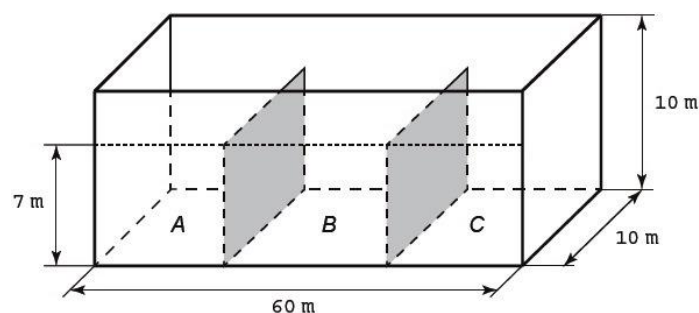
- Caixa 1: $86 \text{ cm} \times 86 \text{ cm} \times 86 \text{ cm}$
- Caixa 2: $75 \text{ cm} \times 82 \text{ cm} \times 90 \text{ cm}$
- Caixa 3: $85 \text{ cm} \times 82 \text{ cm} \times 90 \text{ cm}$
- Caixa 4: $82 \text{ cm} \times 95 \text{ cm} \times 82 \text{ cm}$
- Caixa 5: $80 \text{ cm} \times 95 \text{ cm} \times 85 \text{ cm}$

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior.

A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

18)(Enem-2016) Um petroleiro em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dada por $60 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.

Para fins de cálculos, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

- (a) $1,4 \times 10^3 \text{ m}^3$ (d) $3,2 \times 10^3 \text{ m}^3$
 (b) $1,8 \times 10^3 \text{ m}^3$ (e) $6,0 \times 10^3 \text{ m}^3$
 (c) $2,0 \times 10^3 \text{ m}^3$

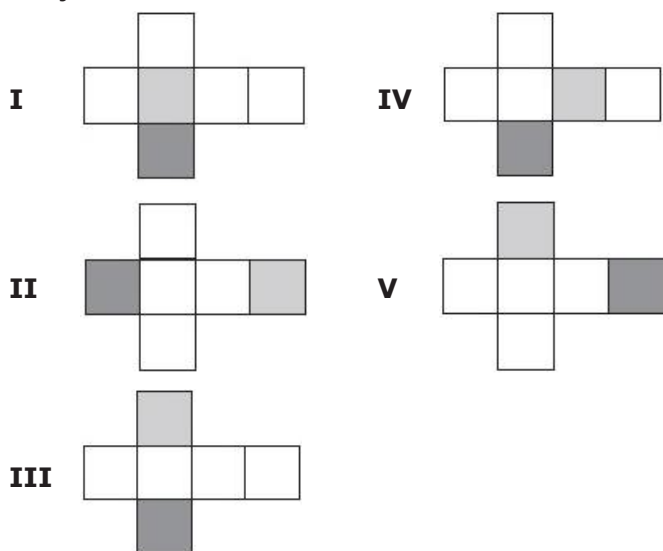
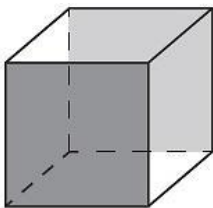
Os exercícios **19)** e **20)** contemplam o seguinte descritor e habilidades:

Descritor SAEB: D3 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

Habilidade Enem: H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

Habilidade Enem: H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

19)(Enem-2015) Uma empresa que embala seus produtos em caixas de papelão, na forma de hexaedro regular, deseja que seu logotipo seja impresso nas faces opostas pintadas de cinza, conforme a figura:



Que opção sugerida pela gráfica atende ao desejo da empresa?

(a) I (b) II (c) III (d) IV (e) V

20)(Enem-2015) Uma empresa necessita colorir parte de suas embalagens, com formato de caixas cúbicas, para que possa colocar produtos diferentes em caixas distintas pela cor, utilizando para isso um recipiente com tinta, conforme figura 1. Nesse recipiente, mergulhou-se um cubo branco, tal como se ilustra a figura 2. Desta forma, a parte do cubo que ficou submersa adquiriu a cor da tinta.

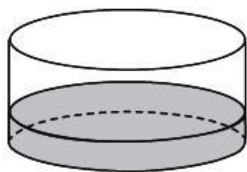


Figura 1

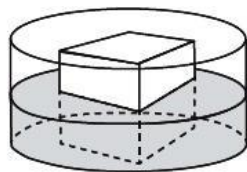
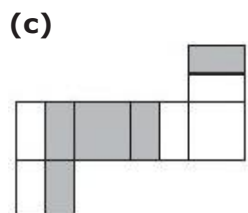
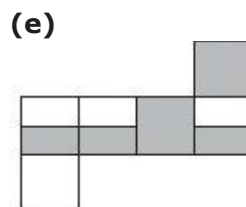
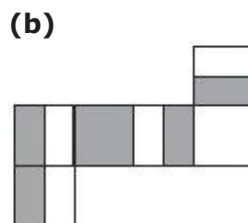
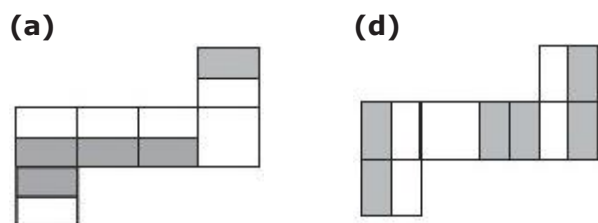


Figura 2

Qual a planificação desse cubo após submerso?



O exercício **21)** contempla as seguintes habilidades:

Habilidade Enem: H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

Habilidade Enem: H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

21)(Enem-2015) Para modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se um canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

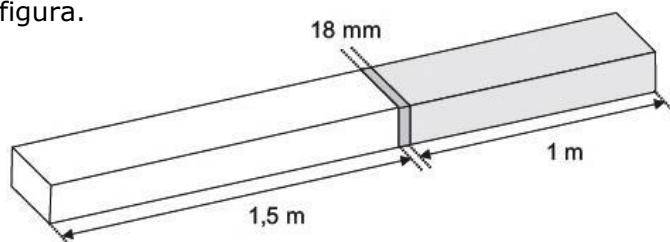
(a) 6 (b) 8 (c) 14 (d) 24 (e) 30

O exercício **22)** contempla as seguintes habilidades:

Habilidade Enem: H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Habilidade Enem: H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

22)(Enem-2015) Atendendo à encomenda de um mecânico, um soldador terá de juntar duas barras de metais diferentes. A solda utilizada tem espessura de 18 milímetros, conforme ilustrado na figura.



Qual o comprimento, em metros, da peça resultante após a soldagem?

(a) 2,0230 (c) 2,5018 (e) 2,6800
(b) 2,2300 (d) 2,5180

Os exercícios **23)**, **24)**, **25)**, **26)** e **27)** contemplam o seguinte descritor e habilidade:

Descritor SAEB: D13 - Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Habilidade BNCC: EM13MAT309 - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.

23)(Enem-2015) Uma carga com 100 contêineres, idêntico ao modelo apresentado na figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (figura 2)

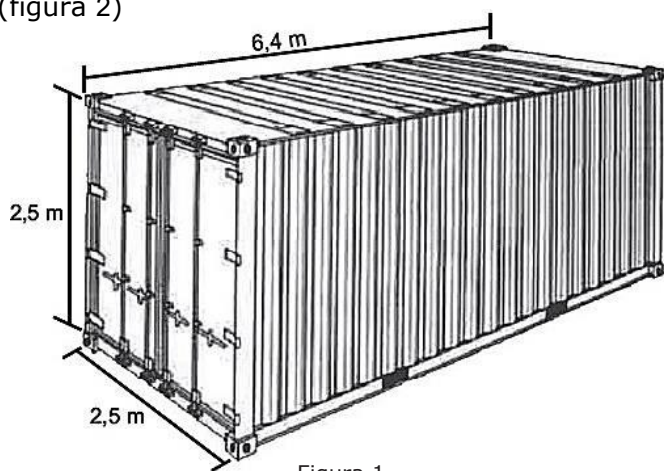


Figura 1



Figura 2

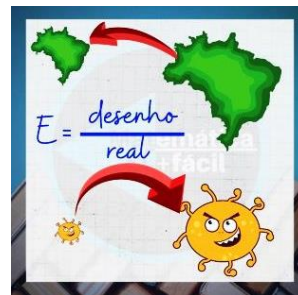
De acordo com as regras desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo a norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

- (a) 12,5 m (c) 25,0 m (e) 32,5 m
(b) 17,5 m (d) 22,5 m

[\(Resolução em videoaula →\)](#)

Lembrete:



O exercício **24)** contempla a seguinte habilidade:

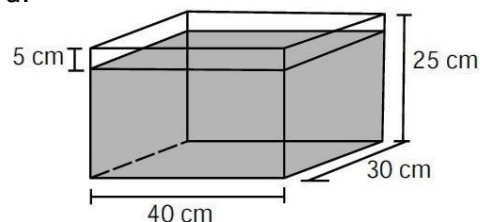
Habilidade Enem: H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

24)(Enem-2014) O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1 : 100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões dos armários, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3 cm, 1 cm e 2 cm.

O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será

- (a) 6. (c) 6 000. (e) 6 000 000.
(b) 600. (d) 60 000.

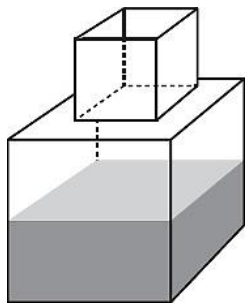
25)(Enem-2012) Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2 400 cm³?

- (a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
(b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
(c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
(d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
(e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

26)(Enem-2014) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, com indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

- (a) 8 (b) 10 (c) 16 (d) 18 (e) 24

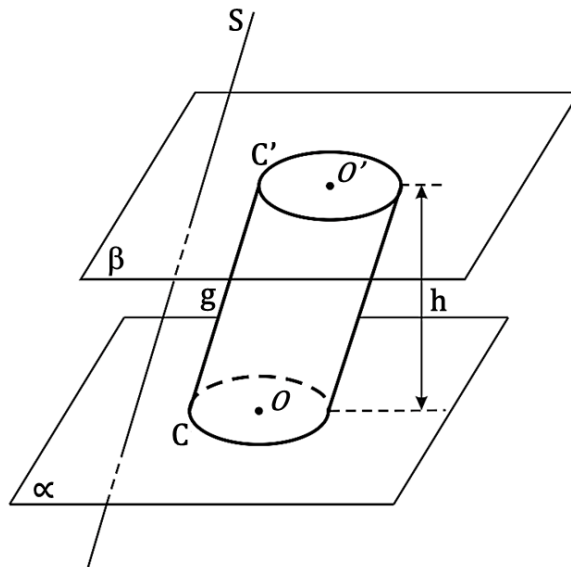
27)(UEPA-2008) O Iterpa, dando continuidade ao programa de reforma agrária do Governo Federal, assentou certo número de famílias em terras na região Amazônica. Para minimizar os problemas de falta d'água, foram construídas duas caixas d'água **I** e **II**, de um mesmo material, com tampas e formato de paralelepípedo retângulo. A caixa **I**, de base quadrada, de lado **4 m** e altura **3 m**, e a caixa **II**, de base retangular de dimensões **3 m** e **4 m** e altura **4 m**. Nessas condições, afirma-se que:

- (a) as quantidades de material gasto na construção das caixas I e II são iguais.
 (b) o volume da caixa I é maior que o volume da caixa II.
 (c) na construção da caixa I se gastará mais material que na caixa II.
 (d) o volume da caixa II é maior que o volume da caixa I.
 (e) na construção da caixa II, se gastará mais material que na da caixa I.

CAPÍTULO II - CILINDRO CIRCULAR

1. DEFINIÇÃO

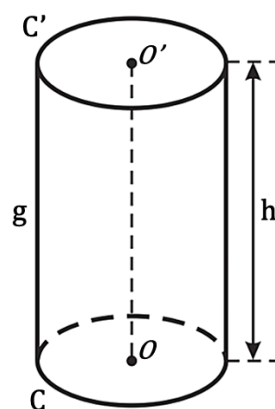
Sejam α e β dois planos paralelos distintos, uma reta S secante a esses planos e um círculo C de centro O contido em α . Consideremos todos os segmentos de reta, paralelos a S , de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente ao círculo C e o outro extremo pertencente a β .



A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado de **cilindro circular limitado** de bases C e C' ou simplesmente **cilindro circular**.

2. ELEMENTOS DO CILINDRO CIRCULAR

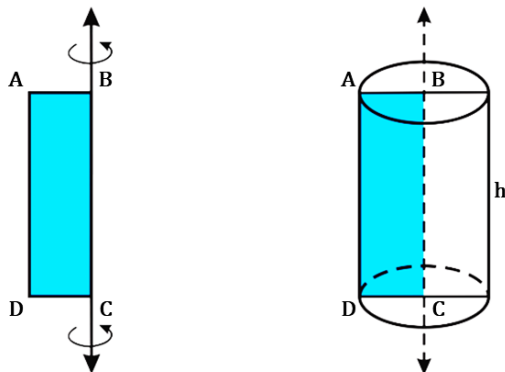
- **Bases do cilindro:** são os círculos C e C' de centros O e O' , respectivamente;
- **Eixo do cilindro:** é o segmento de reta que liga os centros das bases, isto é, o segmento $\overline{OO'}$;
- **Altura (h):** é a distância entre as bases;
- **Geratriz (g):** todo segmento de reta paralelo ao eixo $\overline{OO'}$ que tem extremidades pertencentes às circunferências das bases.



3. CILINDRO CIRCULAR RETO



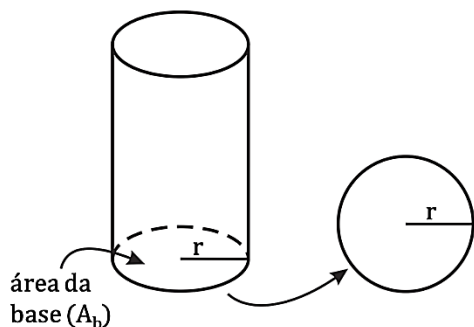
É o sólido obtido pela rotação completa de um retângulo em torno de um de seus lados. A base do cilindro de revolução é um círculo.



4. CÁLCULO DAS CARACTERÍSTICAS

4.1 Área da base (A_b)

Área de cada base do cilindro circular é a área do círculo do raio r :



$$A_b = A_{\text{círculo}}$$

$$A_b = \pi r^2$$

; sendo

π – o número irracional 3,141592 ...;

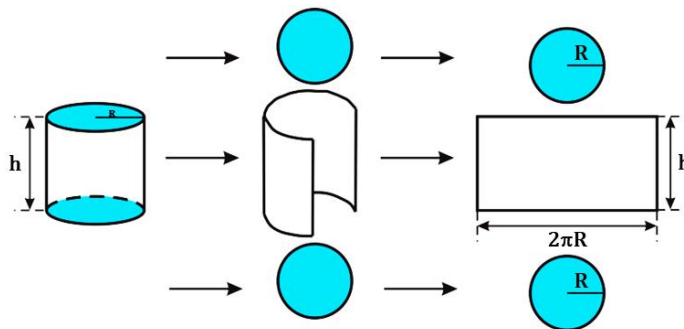
r – o raio do círculo da base do cilindro;

A_b – área da base do cilindro.

4.2 Área lateral (A_ℓ)

Descritor SAEB: D3 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

Para determinar a área lateral do cilindro circular é necessário planificar sua superfície lateral. Fazendo-se esse processo verifica-se que a planificação resultará em um retângulo de mesma altura que o referido cilindro e cuja base é o comprimento do círculo da base do cilindro, figura abaixo:



A área da lateral do cilindro circular é de formato retangular, portanto

$$A_\ell = A_{\text{retângulo}} = bh = 2\pi r \cdot h \therefore$$

$$A_\ell = 2\pi R \cdot h$$

; sendo

π – o número irracional 3,141592 ...;

R – raio do círculo da base do cilindro;

h – altura do cilindro;

A_ℓ – área lateral do cilindro.

4.3 Área total (A_t)

É a soma entre a área lateral e as áreas das duas bases do cilindro circular:

$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$$

; sendo

A_ℓ – área lateral do cilindro;

A_b – área da base do cilindro;

A_t – área total do cilindro.

4.4 Volume (V)

Como o cilindro circular reto possui duas bases paralelas e congruentes, como o prisma, calcula-se o seu volume pela mesma expressão do prisma:

$$A_b = \pi r^2$$

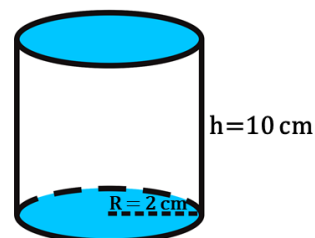
; sendo

A_b – área da base do cilindro;

h – altura do cilindro;

V – volume do cilindro.

Exemplo: Observe o cilindro circular reto abaixo:



Calcular (considere $\pi = 3$):

a) a sua área da base.

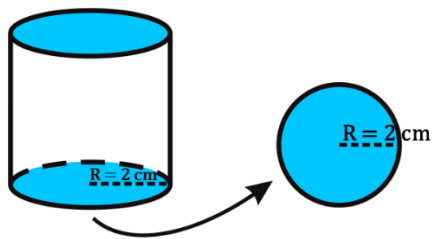
b) a sua área lateral.

c) a sua área total.

d) o seu volume.

Resoluções:

a) Observe a área da base do cilindro circular reto na forma planificada, figura abaixo:



Verifica-se que a área da base do referido cilindro é de formato circular, portanto

$$A_b = A_{\text{círculo}} = \pi r^2$$

$$A_b = \pi \cdot 2^2$$

$$A_b = \pi \cdot 4$$

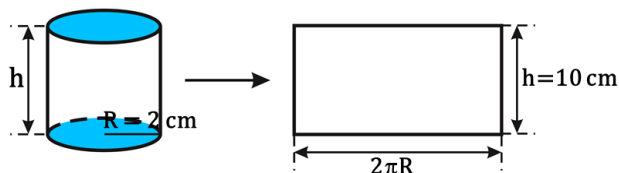
$$A_b = 4\pi$$

$$A_b = 4 \cdot 3$$

$$A_b = 12 \text{ cm}^2$$

Resposta: A área da base do cilindro circular é 12 cm².

b) Observe a área lateral do cilindro circular reto na forma planificada, figura abaixo:



A expressão da área da lateral do cilindro circular é

$$A_\ell = 2\pi rh$$

$$A_\ell = 2\pi \cdot 2 \cdot 10$$

$$A_\ell = 40\pi$$

$$A_\ell = 40 \cdot 3$$

$$A_\ell = 120 \text{ cm}^2$$

Resposta: A área lateral do cilindro circular é 120 cm².

c) A expressão da área total do cilindro circular reto é

$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$$

, logo

$$A_t = 120 + 2 \cdot 12$$

$$A_t = 120 + 24$$

$$A_t = 144 \text{ cm}^2$$

Resposta: A área total do cilindro circular é 144 cm².

d) A expressão do volume do cilindro circular reto é

$$V = A_b \cdot h$$

, logo

$$V = 12 \cdot 10$$

$$V = 120 \text{ cm}^3$$

Resposta: O volume do cilindro circular é 120 cm³.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Os exercícios **28)** até **33)** seguem o seguinte descritor e habilidade:

Descritor SAEB: D13 - Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Habilidade BNCC: EM13MAT309 - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.

28) Um cilindro circular reto possui raio da base igual a 2 m e altura igual a 5 m. Considerando $\pi = 3$, calcule o volume desse cilindro. $V = 60 \text{ m}^3$

29) Uma lata de refrigerante tem raio igual a 4 cm e altura de 10 cm. Quantos cm³ de líquido podem ser colocados dentro dessa lata? (Considere $\pi = 3$) $V = 480 \text{ cm}^3$

30) Um produto é embalado em recipientes com formato de cilindros retos. O cilindro A tem altura 20 cm e raio da base 5 cm. O cilindro B tem altura 10 cm e raio da base 10 cm. Considerando $\pi = 3$, responda:

a) Em qual das embalagens se gasta menos material? Embalagem A, cuja $A_t = 750 \text{ cm}^2$, enquanto embalagem B a $A_t = 1200 \text{ cm}^2$

b) O produto embalado no cilindro em A é vendido a R\$ 4,00 a unidade e o do cilindro B a R\$ 7,00 a unidade. Para o consumidor, qual a embalagem mais vantajosa? Embalagem B, R\$ 0,0023 cm³ aproximadamente, enquanto a embalagem A R\$ 0,0026 cm³ aproximadamente

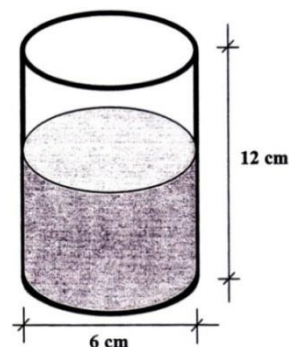
EXERCÍCIOS DE VESTIBULARES

Lembrete:



31)(UEPA-2003) Os profissionais da área de nutrição têm orientado a população de que uma boa alimentação deve ser balanceada em elementos nutritivos, ocasionando maior resistência física, vida mais saudável e mais longa aos cidadãos. Portanto, adquirir hábitos alimentares salutar, é hoje uma prática indispensável para aqueles que desejam obter uma boa saúde. Um desses hábitos, segundo os nutricionistas, é beber água somente entre as refeições, 6 a 8 copos diariamente, jamais durante.

A quantidade aproximada de água, em litros, ingerida por um indivíduo que bebe diariamente 8 vezes os $\frac{3}{4}$ do copo indicado na figura abaixo é: (dado $\pi = 3,14$)



(a) 1,0 ℓ (b) 1,3 ℓ (c) 1,5 ℓ (d) 2,0 ℓ (e) 2,5 ℓ

32)(Enem-2015) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião de condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem o formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π .

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

(a) 0,5 (b) 1,0 (c) 2,0 (d) 3,5 (e) 8,0

33)(Enem-2015) O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível da água acumulada em 1 m^2 , ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo de 1 m^2 de área de base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal, verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 300 mm e altura 1 200 mm, era de um terço de sua capacidade.

Utilize 3,0 como aproximação para π .

O índice pluviométrico da região durante o período do temporal, em milímetros, é de

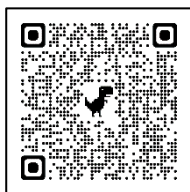
(a) 10,8 (c) 32,4 (e) 324,0

(b) 12,0 (d) 108,0

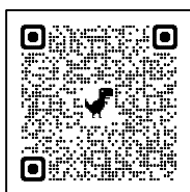
[\(Resolução em videoaula →\)](#)

Continua em [Apostila de Geometria Espacial II \(8 páginas, 34 questões, com gabarito\) →](#)

5. OBJETOS DIGITAIS DE APRENDIZAGEM-ODA



[Aulas gravadas](#)



[Slides das aulas](#)

6. REFERÊNCIAS

DANTE, L.R. *Matemática: Contexto & Aplicações*. 2. Ed. São Paulo: Ática, 2000, v.2.

“A perseverança alimenta a esperança.”

Atualizada em 18/5/2025

Gostou da apostila? Você encontra várias apostilas como essa no **blog do Professor Gilberto Santos**, no endereço <https://professorgilbertosantos.blogspot.com/> ou siga pelo QR code ao lado.

